

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021 – 2022
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ – ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ – Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΜΕΡΟΣ Α:

A1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 + 2\eta\mu x + e^x - \ln x + 7, \quad x \in (0, +\infty)$$

Λύση:

$$f'(x) = 3x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x + e^x - \frac{1}{x} + 0 \quad \text{5X1}$$

A2. Να λύσετε την εξίσωση $\ln x - \ln 2 = \ln 40$

Λύση:

Περιορισμός: $x > 0$

$$\ln x - \ln 2 = \ln 40 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln 40 \Rightarrow \frac{x}{2} = 40 \Rightarrow x = 80$$

A3. Σε αριθμητική πρόοδο ο τρίτος όρος είναι 7 και το άθροισμα του πρώτου και του έβδομου όρου της είναι 20. Να βρείτε τον πρώτο όρο και την διαφορά της αριθμητικής πρόοδου.

Λύση:

$$\alpha_3 = 7 \Rightarrow \alpha_1 + 2\delta = 7$$

$$\alpha_1 + \alpha_7 = 20 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_1 + 6\delta = 20 \Rightarrow 2\alpha_1 + 6\delta = 20 \Rightarrow \alpha_1 + 3\delta = 10$$

$$\begin{array}{l|l} \alpha_1 + 2\delta = 7 & -1 \Rightarrow -\alpha_1 - 2\delta = -7 \\ \alpha_1 + 3\delta = 10 & 1 \Rightarrow \alpha_1 + 3\delta = 10 \end{array} +$$

$$\delta = 3$$

$$\alpha_1 + 3\delta = 10 \Rightarrow \alpha_1 + 3 \cdot 3 = 10 \Rightarrow \alpha_1 = 1$$

A4. Η καμπύλη (K) έχει εξίσωση $x^3 - xy + y^2 = 11$

(α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 2y}$$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη (K) στο σημείο της με τετμημένη $x = 2$ και τεταγμένη $y > 0$.

Λύση:
(α)

$$x^3 - xy + y^2 = 11 \Rightarrow 3x^2 - y - x \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 3x^2 - y \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x - 2y) = 3x^2 - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 2y}$$

(β)

$$x = 2 \text{ και τεταγμένη } y > 0 \Rightarrow 8 - 2y + y^2 = 11 \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$(y - 3)(y + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$y = 3 \text{ δεκτή (} y > 0 \text{)}$$

$$y = -1 \text{ Απορρ.}$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το (2,3)

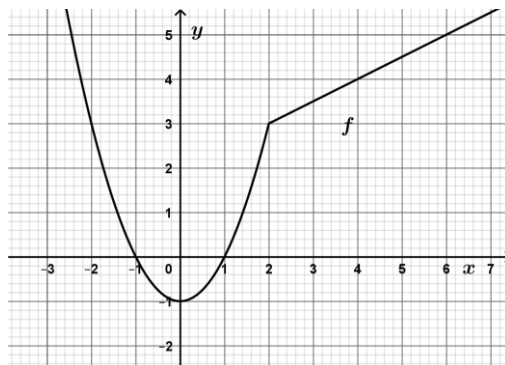
$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,3)} = \frac{3 \cdot 4 - 3}{2 - 2 \cdot 3} = \frac{9}{-4} = -\frac{9}{4}$$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$y - y_1 = \lambda_{\varepsilon\varphi}(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -\frac{9}{4}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 4y - 12 = -9x + 18 \Rightarrow 9x + 4y = 30$$

A5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty)$



I. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες: (4 μον.)

(α) η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη

(β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη

II. Να βρείτε την τιμή $f'(4)$ (1 μον.)

Λύση:

I. (α) $x = 2$

(β) $x = 0$

2

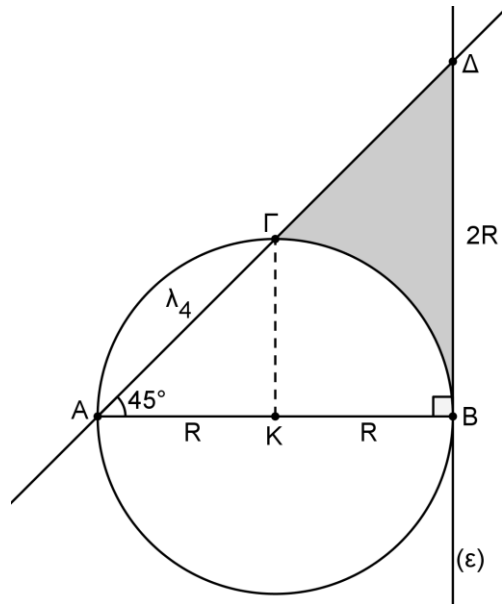
2

$$\text{II. } f'(4) = \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 4}{6 - 4} = \frac{1}{2}$$

(Χρησιμοποιώντας τα σημεία (4,4) και (6,5) ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο)

A6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και μια διάμετρος του AB . Στο σημείο B φέρουμε την εφαπτομένη (ε) και από το A τη χορδή $AG = \lambda_4$. Η προέκταση της AG τέμνει την εφαπτομένη (ε) στο Δ . Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου $B\Gamma\Delta$, συναρτήσει της ακτίνας R .

Λύση:



$$E_{\sigma\kappa.B\Gamma\Delta} = E_{AB\Delta} - E_{AK\Gamma} - E_{\kappa.\tau\omicron\mu\kappa B\Gamma}$$

Επειδή $AG = \lambda_4 \Rightarrow \widehat{AK\Gamma} = 90^\circ$

Το τρίγωνο $AK\Gamma$ ορθογώνιο και ισοσκελές $\Rightarrow \widehat{G\hat{A}K} = 45^\circ$

Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές διότι $(\varepsilon) \perp AB$ και $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 45^\circ$

Άρα $B\Delta = AB = 2R$

$$E_{AB\Delta} = \frac{1}{2} 2R \cdot 2R = 2R^2$$

$$E_{AK\Gamma} = \frac{1}{2} R \cdot R = \frac{R^2}{2}$$

$$E_{\kappa.\tau\omicron\mu\kappa B\Gamma} = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$E_{\sigma\kappa.B\Gamma\Delta} = 2R^2 - \frac{R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4}$$

$$E_{\sigma\kappa.B\Gamma\Delta} = \frac{6}{4} R^2 - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{R^2}{4} (6 - \pi) \text{ τ.μ.}$$

ΜΕΡΟΣ Β:

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta - \eta\mu x, & x < 0 \\ x^2 + \beta x, & x \geq 0 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$

Λύση:

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, είναι και συνεχής στο $x = 0$ 0,5

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ 1,5

• $f(0) = 0^2 + \beta \cdot 0 = 0$ 0,5

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \beta x) = 0$ 0,5

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x + \beta - \eta\mu x) = \alpha \cdot 0 + \beta - \eta\mu 0 = \beta$ 0,5

Άρα $\beta = 0$ 0,5

Δηλαδή, $f(x) = \begin{cases} \alpha x - \eta\mu x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
 1,5

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x - \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \alpha - 1 = \alpha - 1$ 0,5

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ 0,5

0,5

0,5

Άρα $\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ 0,5

B2. (α) Να λύσετε την εξίσωση (6 μον.)

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$$

(β) Αν το ρ είναι η μεγαλύτερη από τις λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε το άθροισμα: (4 μον.)

$$S = \log_2 \rho + \log_4 \rho + \log_{16} \rho + \log_{256} \rho + \dots$$

Λύση:

(α)

Περιορισμοί: $\begin{cases} 9^{x-1} + 7 > 0 \\ 3^{x-1} + 1 > 0 \end{cases}$

Οι πιο πάνω περιορισμοί ικανοποιούνται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, καθώς $9^{x-1} > 0$ και $3^{x-1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$$

0,5

$$\Rightarrow \log_2(9^{x-1} + 7) = \log_2 4 + \log_2(3^{x-1} + 1)$$

0,5

$$\Rightarrow \log_2(9^{x-1} + 7) = \log_2[4(3^{x-1} + 1)]$$

0,5

$$\Rightarrow 9^{x-1} + 7 = 4(3^{x-1} + 1)$$

0,5

$$\Rightarrow 9^{x-1} + 7 = 4 \cdot 3^{x-1} + 4$$

Θέτουμε όπου $3^{x-1} = \omega$, $\omega > 0$

0,5

$$\Rightarrow \omega^2 + 7 = 4\omega + 4$$

0,5

$$\Rightarrow \omega^2 - 4\omega + 3 = 0$$

0,5

$$\Rightarrow (\omega - 1)(\omega - 3) = 0$$

0,5

$$\Rightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = 3$$

- $\omega = 1 \Rightarrow 3^{x-1} = 1 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ δεκτή

0,5+0,5

- $\omega = 3 \Rightarrow 3^{x-1} = 3 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$ δεκτή

0,5+0,5

(β) Αφού η μεγαλύτερη λύση της πιο πάνω εξίσωσης είναι το 2, έχουμε $\rho = 2$

$$S = \log_2 2 + \log_4 2 + \log_{16} 2 + \log_{256} 2 + \dots$$

0,5

$$= 1 + \frac{\log_2 2}{\log_2 4} + \frac{\log_2 2}{\log_2 16} + \frac{\log_2 2}{\log_2 256} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

4x0,5

Επομένως το S είναι το άθροισμα απείρων όρων απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\alpha_1 = 1$

$$S = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

0,5+0,5

0,5

B3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln(e^{2x} + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\frac{(f'(x))^2}{f''(x)} = e^{2x}$$

(7 μον.)

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = -x$

(3 μον.)

Λύση:

(α)

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} + 1)'}{e^{2x} + 1} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

1+0,5

2

1

$$f''(x) = \frac{4e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{4x} + 4e^{2x} - 4e^{4x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

0,5

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\frac{(f'(x))^2}{f''(x)} = \frac{\left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}\right)^2}{\frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}} = \frac{4e^{4x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{4x}(e^{2x} + 1)^2}{4e^{2x}(e^{2x} + 1)^2} = e^{2x}$$

0,5+0,5

0,5

0,5

(β)

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το ζητούμενο σημείο.

Η εφαπτομένη ευθεία (ε_1) της γραφικής παράστασης της f στο A είναι κάθετη στην ευθεία (ε_2): $y = -x$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \lambda_2 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{0,5}$$

Επομένως $f'(x_0) = \lambda_1 = 1$ 0,5

$$\Rightarrow \frac{2e^{2x_0}}{e^{2x_0} + 1} = 1$$

$$\Rightarrow 2e^{2x_0} = e^{2x_0} + 1 \quad \text{0,5}$$

$$\Rightarrow e^{2x_0} = 1 \quad \text{0,5}$$

$$\Rightarrow x_0 = 0 \quad \text{0,5}$$

$$f(x_0) = f(0) = \ln(e^0 + 1) = \ln 2 \quad \text{0,5}$$

Οι συντεταγμένες του σημείου A είναι $A(0, \ln 2)$ 0,5

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ – ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ